

水平バネ振り子と単振り子からなる 系の周期的な振る舞い

山 口 巖

On the periodical behavior of a system consisting of
a horizontal spring pendulum and a simple pendulum

Iwao YAMAGUCHI

要 旨

水平バネ振り子と単振り子からなる系の周期的な振る舞いが数値的な方法で調べられた。微小振動理論が適用できない水平バネ振り子の初期変位と単振り子の初期角度の特別な組み合わせ (0.13m , 53.59°) に対して、水平バネ振り子は単振り子よりも特異な振る舞いをするが見いだされた。2つの振り子が同方向に振動する場合、単振り子のおもりは静かに手放されてから最下点まで徐々に加速され、最下点を通過後、徐々に減速され、手放した位置とは水平バネ振り子のおもりのつりあい位置を通る鉛直軸に関して反対側の対称な位置に達する。その後、逆の経路をたどって最下点まで徐々に加速され、続いて徐々に減速されて手放した位置まで戻る。そして、この振動が周期的に繰り返される。一方、水平バネ振り子のおもりは静かに手放されてから徐々に加速されるが、つりあい位置の手前で減速され、つりあい位置を通過してしばらくは加速され、その後徐々に減速され、手放した位置とは水平バネ振り子のおもりのつりあい位置を通る鉛直軸に関して反対側の対称な位置に達する。その後、逆の経路をたどってつりあい位置の手前まで徐々に

加速され、その後減速されてつりあい位置を通過し、続いてしばらくは加速された後、徐々に減速されて手放した位置まで戻る。そして、この振動が周期的に繰り返される。2つの振り子の振幅は位相を等しくして同じ周期で振動する。

水平バネ振り子と単振り子からなる系の周期的な振る舞いは、水平バネ振り子の初期変位と単振り子の初期角度の数多くの組み合わせに対して一般的な特性である。そして、周期的な振る舞いをする系に対して、系の全エネルギー、水平バネ振り子の初期変位、そして単振り子の初期角度の間に近似的な関係が数値的に見いだされた。

水平バネ振り子と単振り子からなる系で、水平バネ振り子の初期変位が大きく、単振り子の初期角度が極端に大きい場合の2つの振り子の振る舞いについても言及し、カオスを特徴づける数理的性質の1つである「初期値に対する鋭敏な依存性」を確かめることにより、その振る舞いがカオス的事であることの傍証を与える。

キーワード：水平バネ振り子と単振り子からなる系、周期的な振る舞い、
カオス的な振る舞い

1. はじめに

以前に二重振り子の周期的な振る舞いを研究¹⁾した。今回は水平バネ振り子と単振り子からなる系の運動を二重振り子の運動の場合の解析方法で研究する。2節では、水平バネ振り子と単振り子からなる系の運動を記述する1階連立微分方程式を導出し、3節では、この系の周期的な振る舞いの具体的な数値解法例を示し考察する。4節では、周期的な振る舞いをする系に対して、系の全エネルギー、水平バネ振り子の初期変位、そして単振り子の初期角度の近似的な関係を導出する。5節では、水平バネ振り子の初期変位が大きく、単振り子の初期角度が極端に大きい場合の数値シミュレーション例を示し2つの振り子のカオス的な振る舞いを考察する。

2. 水平バネ振り子と単振り子からなる系のハミルトニアンとハミルトンの正準方程式

重さを無視できる強さ k のバネの一端を固定し、他端に質量 m_1 のおもり 1 を取り付ける。このバネ振り子は水平方向にのみ振動できるものとする。さらに、このおもり 1 に固定された回転軸に重さを無視できる長さ l のロッドの一端を固定し、他端に質量 m_2 のおもり 2 を取り付ける。この水平バネ振り子に取り付けられた単振り子は 1 つの鉛直面内で自由

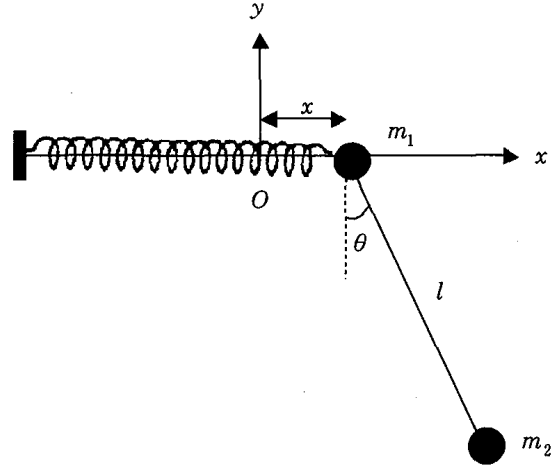


図 1

に振動あるいは回転できるものとし、この結合した振り子の系の運動を考察する。おもり 1 のつりあい位置を原点 O にとり、水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとるとき、この結合した振り子の系は xy 平面内で運動するものとする。(図 1)

今、任意の時刻におけるおもり 1 の位置の座標を $(x, 0)$ 、ロッドが鉛直下方となす角度を θ とするとき、この結合した振り子の系のハミルトニアン H は次で表される。(付録 1)

$$H = \frac{\frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{p_\theta^2}{2m_2 l^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{p_x p_\theta}{m_1 l} \cos \theta}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta} + m_2 g l (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} k x^2 \quad (1)$$

ここで、力学変数 p_x と p_θ は x と θ に共役な一般化運動量であり、 g は重力の加速度である。

このハミルトニアン H をハミルトンの正準方程式に適用することにより、力学変数 x, θ, p_x, p_θ に対する次の 1 階連立常微分方程式を得る。(付録 2)

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{\frac{p_x}{m_1} - \frac{p_\theta}{m_1 l} \cos \theta}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta}, \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\frac{p_\theta}{m_2 l^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{p_x}{m_1 l} \cos \theta}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta}, \\
\frac{dp_x}{dt} &= -kx, \\
\frac{dp_\theta}{dt} &= \frac{\left[\left\{ \frac{p_x^2}{m_1} + \frac{p_\theta^2}{m_2 l^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \right\} \frac{m_2}{m_1} \cos \theta - \frac{p_x p_\theta}{m_1 l} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_2}{m_1} \cos^2 \theta\right) \right] \sin \theta}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta\right)^2} \\
&\quad - m_2 g l \sin \theta.
\end{aligned} \tag{2}$$

式(2)は高度に非線形であり、一般に、このような非線形1階連立微分方程式を解析的に積分して解を求めることは不可能である。そして通常、数値解法によってのみ積分可能である。

3. 水平バネ振り子と単振り子からなる系の周期的な振る舞いの数値解法例

二重振り子の周期的な振る舞いを研究した以前の論文¹⁾と同様、この節ではハミルトンの正準方程式(2)を4次のルンゲークッタ法により数値的に解法する。

ここでの数値解法では次のパラメータが使われる。

$$k=20.0\text{N/m}, l=0.44\text{m}, m_1=m_2=0.2\text{kg}, g=9.8\text{m/s}^2 \tag{3}$$

以下の例は、バネ振り子の初期変位および単振り子の初期角度に対する初期条件 $x(0)$ と $\theta(0)$ を指定し、一般化運動量に対する初期条件を $p_x(0)=p_\theta(0)=0$ として、時間刻み $h=0.001\text{s}$ ごとに物理量 x, θ, p_x, p_θ を計算するという方法で Mathematica を使って実行された。

A. $x(0)=0.13\text{m}$, $\theta(0)=53.59^\circ$ の場合

この例は、(3)のパラメータに対して、水平バネ振り子と単振り子からなる系が、カオス的な振る舞いへ移行する前段階における周期的な振る舞いの初期条件に対応している。図2は x と θ の位相平面における軌道である。2つの振り子の変位と振れの角度の点 (x, θ) は時間の経過にともない、2つのおもりを静かに手放した A ($x=0.13\text{m}$, $\theta=53.59^\circ=0.935\text{rad}$) から B ($x=-0.13\text{m}$, $\theta=-53.59^\circ=-0.935\text{rad}$) へ、そして B から A へと周期的に変化する。しかも軌道は完全に対称的であることがわかる。さらに、軌道は原点 O 近傍では急峻に変化し、A と B 近傍ではなだらかに変化することもわかる。このように変化する主たる原因がおもり1の振る舞いに起因することは、かなり大きい初期角度に対する二重振り子の周期的な振る舞いの場合¹⁾と同様、おもり1の運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の変化の様子を調べることによりわかる。

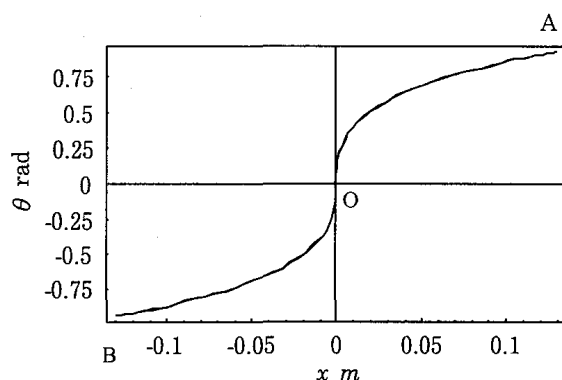


図2

図3と図4はおもり1とおもり2のそれぞれの安定平衡位置を基準にとったときの運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の時間経過にともなう変化の様子を示している (時間刻み $h=0.001\text{s}$ で、おもり1とおもり2の運動エネルギーと位置エネルギーの数値結果をプロットしたもの)。図3からおもり1の運動エネルギーと位置エネルギーの点 (KE_1, PE_1) は、折れ曲がったなめらかな曲線上を、時間の経過にともない $A_1(KE_1=0.00\text{J}, PE_1=0.17\text{J})$ から $B_1(KE_1=0.035\text{J}, PE_1=0.040\text{J})$ へ、さらに $C_1(KE_1=0.00\text{J}, PE_1=0.00\text{J})$ へ

と変化し、その後、この経路を逆にたどって A_1 へ戻るという変化を示す。一方、図4からおもり2の運動エネルギーと位置エネルギーの点 (KE_2, PE_2) は、 $A_2(KE_2=0.00\text{J}, PE_2=0.35\text{J})$ からほぼ単調な曲線上を $B_2(KE_2=0.52\text{J}, PE_2=0.00\text{J})$ へ、そして B_2 から A_2 への変化を示す。

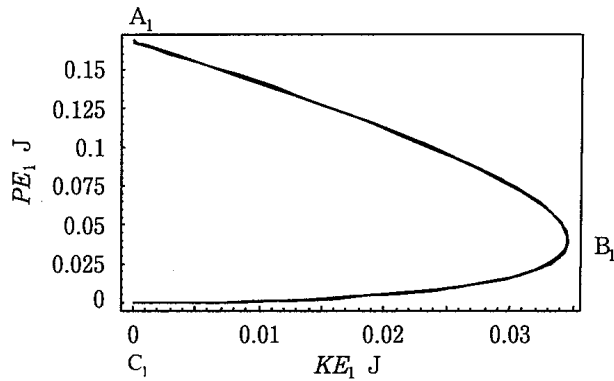


図3

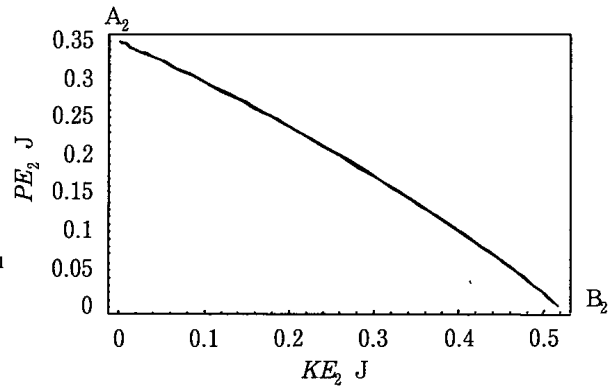


図4

図5と図6はおもり1の運動エネルギー (KE_1) と位置エネルギー (PE_1) の時間変化を、そして図7と図8はおもり2の運動エネルギー (KE_2) と位置エネルギー (PE_2) の時間変化をそれぞれ1周期にわたって図示したものである (図には、図3の A_1, B_1, C_1 および図4の A_2, B_2 に対応する位置が図示されている)。これらの図をもとに、2つのおもりの振る舞いを比較するとき、かなり大きい初期角度に対する二重振り子の周期的な振る舞いの場合¹⁾と同様、おもり1はおもり2より特異な振る舞いをすることがわかる。つまり、おもり2は、単振り子の振る舞いに近い振る舞いをするが、おもり1の振る舞いはおもり2の振る舞いとは対照的に複雑である。半周期間の時間経過を観察するとき、おもり2の運動エネルギーの時間変化はなめらかな増加 ($A_2(t=0.00\text{sec}, KE_2=0.00\text{J})$ から $B_2(t=0.37\text{sec}, KE_2=0.52\text{J})$ までの変化) と減少 ($B_2(t=0.37\text{sec}, KE_2=0.52\text{J})$ から $A_2(t=0.75\text{sec}, KE_2=0.00\text{J})$ までの変化) を繰り返す (図7)。同じく、おもり2の位置エネルギーの時間変化はなめらかな減少 ($A_2(t=0.00\text{sec}, PE_2=0.35\text{J})$ から $B_2(t=0.37\text{sec}, PE_2=0.00\text{J})$ までの変化) と増加 ($B_2(t=0.37\text{sec}, PE_2=0.00\text{J})$ から $A_2(t=0.75\text{sec}, PE_2=0.35\text{J})$ までの変化) を繰り返す (図8)。一方、同じく半周期間の時間経過を観察するとき、おもり

1 の運動エネルギーの時間変化は、 $B_1(t=0.18\text{sec}, KE_1=0.035\text{J})$ で最大に達し、その後 $C_1(t=0.37\text{sec}, KE_1=0.00\text{J})$ で最小まで減少し、さらにその後、 $B_1(t=0.57\text{sec}, KE_1=0.035\text{J})$ で最大まで戻り、その後、 $A_1(t=0.75\text{sec}, KE_1=0.00\text{J})$ で最小まで減少するという複雑な振る舞いを繰り返す (図 5)。しかし、おもり 1 の位置エネルギーの時間変化は、なめらかな減少 ($A_1(t=0.00\text{sec}, PE_1=0.17\text{J})$ から $B_1(t=0.18\text{sec}, PE_1=0.04\text{J})$ を経て $C_1(t=0.37\text{sec}, PE_1=0.00\text{J})$ までの変化) と増加 ($C_1(t=0.37\text{sec}, PE_1=0.00\text{J})$ から $B_1(t=0.57\text{sec}, PE_1=0.04\text{J})$ を経て $A_1(t=0.75\text{sec}, PE_1=0.17\text{J})$ までの変化) を繰り返す (図 6)。

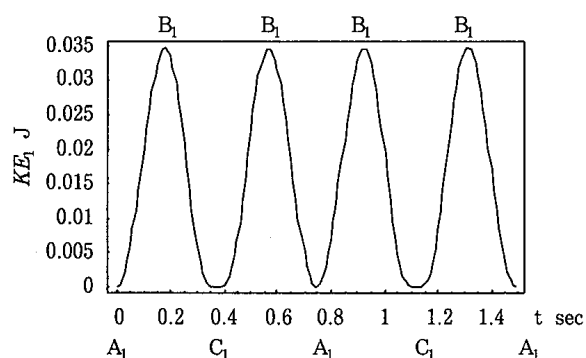


図 5

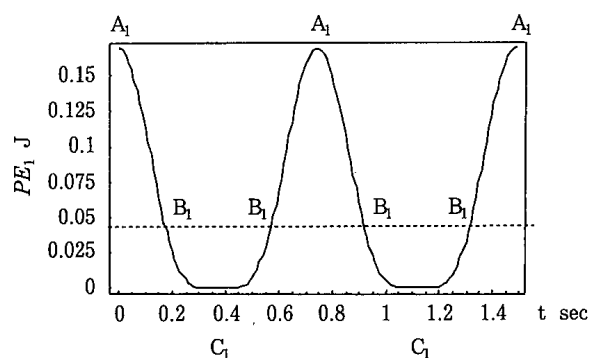


図 6

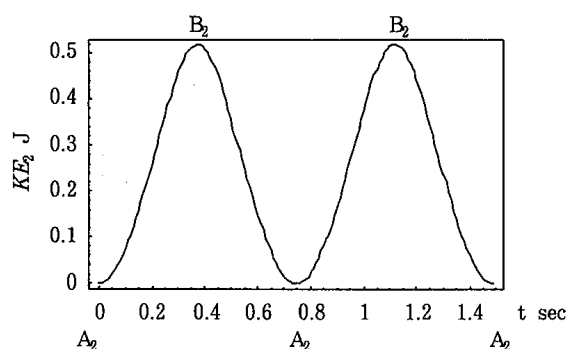


図 7

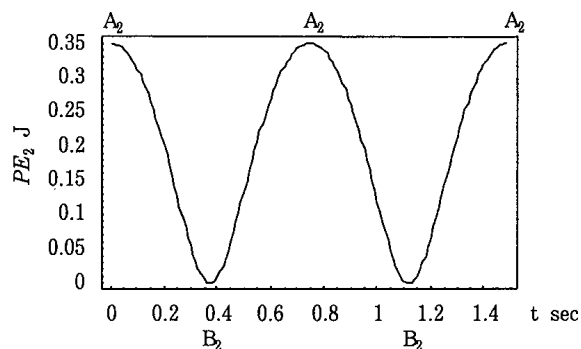


図 8

図 9 と図 10 はおもり 1 の変位 (x) とおもり 2 の振れの角度 (θ) の時間変化を、そして図 11 はおもり 1 と 2 の速度 (v_x と v_θ) の時間変化の重ね書きをそれぞれ 1 周期にわたって図示したものである (図には、図 3 の A_1 , B_1 , C_1 および図 4 の A_2 , B_2 に対応する位置が図示されている)。これらの図から、おもり 1 の方がおもり 2 より特異な振る舞いをすることがより明確になる。おもり 1 は、

静かに手放された $A_1(t=0.00\text{sec}, x=0.13\text{m}, v_x=0.00\text{m/sec})$ から、徐々に速さを増し $B_1(t=0.18\text{sec}, x=0.06\text{m}, v_x=-0.59\text{m/sec})$ で最大速さに達するため、おもり 1 の変位は 0.18 秒近傍で、単位時間あたり大きい変位で減少する。その後、おもり 1 は徐々に速さを減じるため、おもり 1 の変位は単位時間あたり小さい変位で減少し、平衡点 $C_1(t=0.37\text{sec}, x=0.00\text{m}, v_x=0.00\text{m/sec})$ で、おもり 1 はゼロに近い速さになる。その後、おもり 1 は徐々に速さを増し $B_1(t=0.57\text{sec}, x=-0.06\text{m}, v_x=-0.59\text{m/sec})$ で最大速さに戻るため、この時刻の近傍ではおもり 1 の変位は単位時間あたり大きい変位で減少する。その後、おもり 1 は徐々に速さを減じ $A_1(t=0.75\text{sec}, x=-0.13\text{m}, v_x=0.00\text{m/sec})$ で、おもり 1 を手放した位置とは y 軸に関して対称な位置に達する。そして、その後、おもり 1 はこの経路を逆にたどって、おもり 1 を手放した位置まで戻る。

一方、おもり 2 は、静かに手放された $A_2(t=0.00\text{sec}, \theta=53.59^\circ=0.935\text{rad}, v_\theta=0.00\text{m/sec})$ から、徐々に速さを増し $B_2(t=0.37\text{sec}, \theta=0.00^\circ=0.00\text{rad}, v_\theta=-2.26\text{m/sec})$ で最大速さに達するため、おもり 2 の変位は 0.37 秒近傍で、単位時間あたり大きい角度で減少する。その後、おもり 2 は徐々に速さを減じ $A_2(t=0.75\text{sec}, \theta=-53.59^\circ=-0.935\text{rad}, v_\theta=0.00\text{m/sec})$ で、おもり 2 を手放した位置とは y 軸に関して対称な位置に達する。そして、その後、おもり 2 はこの経路を逆にたどって、おもり 2 を手放した位置まで戻る。

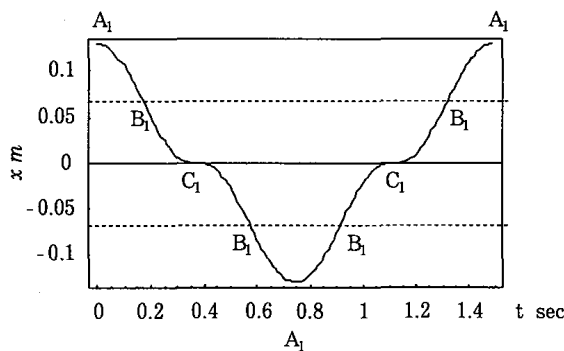


図 9

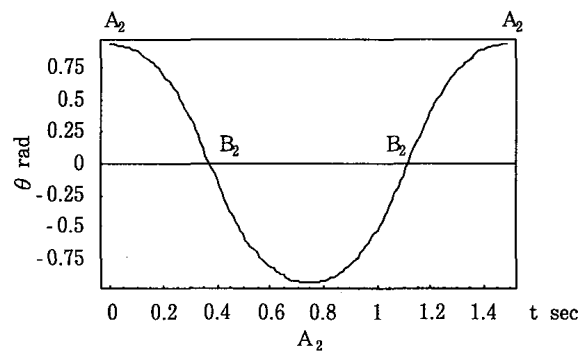


図10

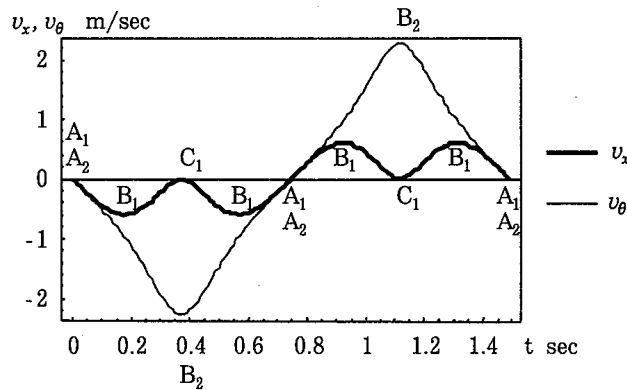


図11

以上の分析から、振れの角度の周期的な軌道(図2)の出現の主たる原因は、おもり1の運動が、おもり2の加速から最大速さを経て減速に転じるような周期的な運動ではなく、加速から最大速さを経て減速しゼロに近い速さになり、続けて加速から最大速さを経て減速するという複雑な周期的振る舞いに起因することがわかる。

図9と図10から、おもり1の変位(x)とおもり2の振れの角度(θ)は周期1.5秒で周期的に振動するがわかる。

水平バネ振り子と単振り子からなる系の運動をおもり1と2の軌跡としてコンピュータでシミュレートするとき、上で考察したこの系の運動の周期性はより明白になる。図12は $x(0)=0.13\text{m}$, $\theta(0)=53.59^\circ$, $p_x(0)=p_\theta(0)=0$ に対して、時間刻み0.025秒でシミュレートした結果である。おもり1が平衡点Oから右へ0.13m引き伸ばされ、同時におもり2が鉛直方向から右上方 53.59° の位置まで持ち上げられ、静かに手放されるとき、 x と θ は位相を等しくして同周期(1.5秒)で振動する。つまり、 x が最大のとき θ も最大、 x が最小のとき(左へ伸び最大) θ も最小(左へ傾き最大)、また $x=0$ のときは $\theta=0$ になるように振動することがわかる。

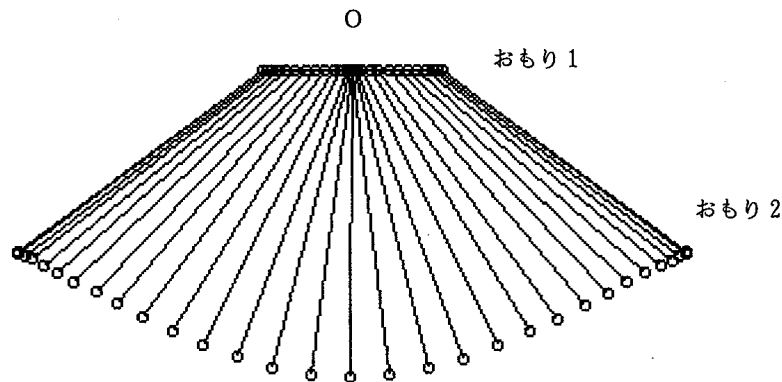


図12

以上は、 $x(0)=0.13\text{m}$ 、 $\theta(0)=53.59^\circ$ というかなり大きい変位と角度に対して、水平バネ振り子と単振り子からなる系が周期的な振る舞いを呈する例であったが、これ以外の初期変位と初期角度対 $(x(0), \theta(0))$ に対しても周期的な振る舞いが見いだされる。

B. $x(0)=0.07\text{m}$ 、 $\theta(0)=29.88^\circ$ の場合

A.の場合と比較して、初期変位 $x(0)$ と初期角度 $\theta(0)$ は小さい。この場合も、おもり 1 の変位 (x) とおもり 2 の振れの角度 (θ) は、図13の軌道図からわかるように図 2 と同様な振る舞いをするが、その変化は図 2 と比較してなだらかであることがわかる。

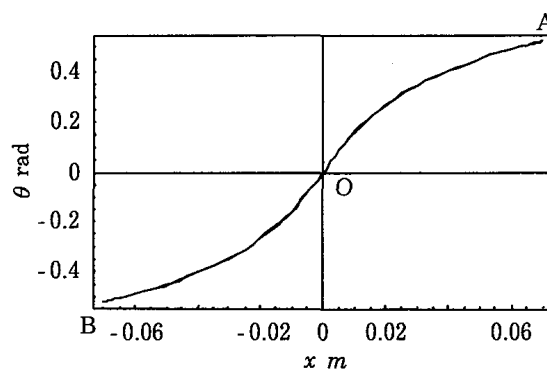


図13

A.の場合と同様、おもり 1 とおもり 2 の運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の時間経過にともなう変化 (図14と図15) を調べるとき、おもり 1 の方がおもり 2 より特異な振る舞いをする事がわかる。図14からおもり 1 の

運動エネルギーと位置エネルギーの点 (KE_1, PE_1) は、折れ曲がったなめらかな曲線上を、時間の経過にともない $A_1(KE_1=0.00J, PE_1=0.049J)$ から $B_1(KE_1=0.0069J, PE_1=0.014J)$ へ、さらに $C_1(KE_1=0.0021J, PE_1=0.00J)$ へと変化し、その後、この経路を逆にたどって A_1 へ戻るという変化を示す。一方、図15からおもり2の運動エネルギーと位置エネルギーの点 (KE_2, PE_2) は、 $A_2(KE_2=0.00J, PE_2=0.115J)$ からほぼ単調な曲線上を $B_2(KE_2=0.161J, PE_2=0.00J)$ へ、そして B_2 から A_2 への変化を示す。

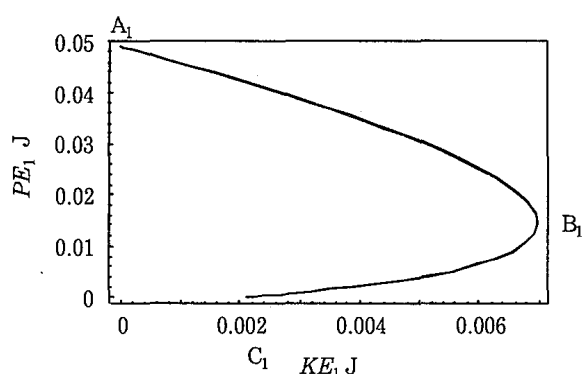


図14

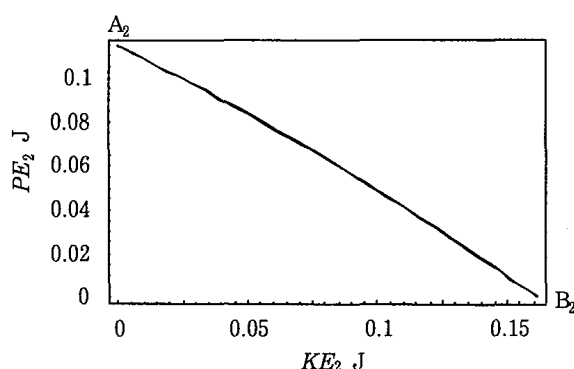


図15

おもり1の変位 (x) とおもり2の振れの角度 (θ) の時間変化を図16と図17に示す (図には、図14の A_1, B_1, C_1 および図15の A_2, B_2 に対応する位置が図示されている)。どちらも同周期 (1.5秒) で周期的に振動していることがわかる。

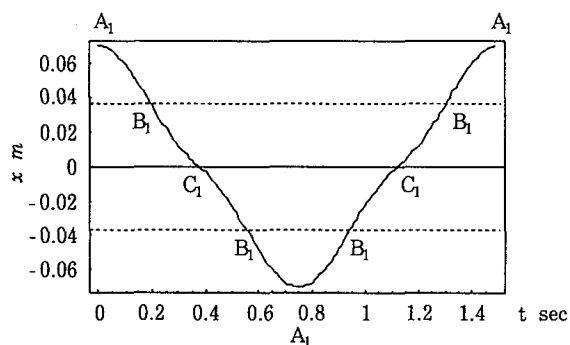


図16

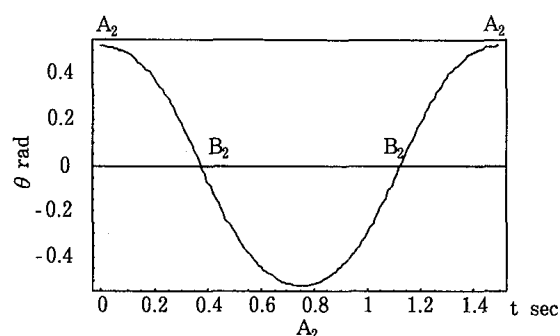


図17

図18は、 $x(0)=0.07m$, $\theta(0)=29.88^\circ$, $p_x(0)=p_\theta(0)=0$ に対して、時間刻み0.075秒で2つのおもりの運動をシミュレートした結果である。A.の場合と同様、 x と θ は同位相、同周期 (1.5秒) で振動することがわかる。

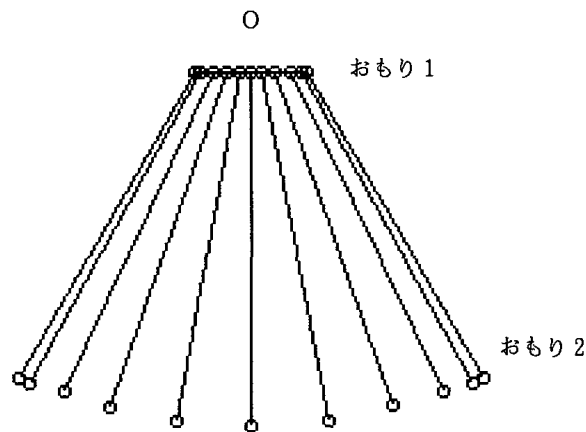


図18

C. $x(0)=0.01\text{m}$, $\theta(0)=4.79^\circ$ の場合

A., B.の場合と比較して, 初期変位 $x(0)$ と初期角度 $\theta(0)$ はさらに小さい。この場合, おもり 1 の変位 (x) とおもり 2 の振れの角度 (θ) は, 図19の軌道図からわかるように, 直線的に変化することがわかる。図 2 と図13の軌道 (x , θ) の変化が曲線的であったこととは対照的である。

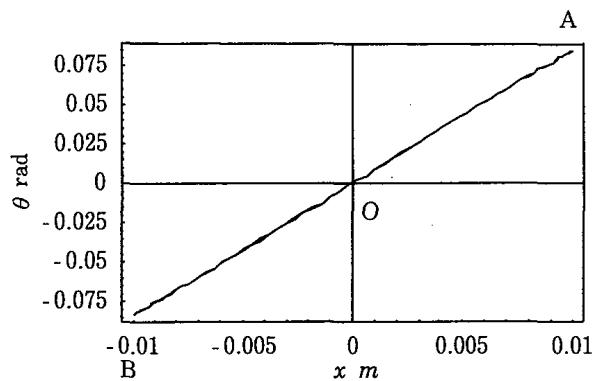


図19

この直線的变化は, おもり 1 とおもり 2 の運動エネルギー (KE) と位置エネルギー (PE) の時間経過にともなう変化 (図20と図21) にもみられる。この場合, 2 つのおもりの運動エネルギーと位置エネルギーの点 (KE_1 , PE_1) と点 (KE_2 , PE_2) は, 点 (KE_1 , PE_1) については $A_1(KE_1=0.00\text{J}, PE_1=0.001\text{J})$ から直線上を $B_1(KE_1=0.00017\text{J}, PE_1=0.00\text{J})$ へ, そして B_1 から A_1 への変化を示す。同様に, 点 (KE_2 , PE_2) については $A_2(KE_2=0.00\text{J}, PE_2=0.003\text{J})$ から直線上を $B_2(KE_2=0.0038\text{J}, PE_2=0.00\text{J})$ へ, そして B_2 から A_2 への変化を示す。

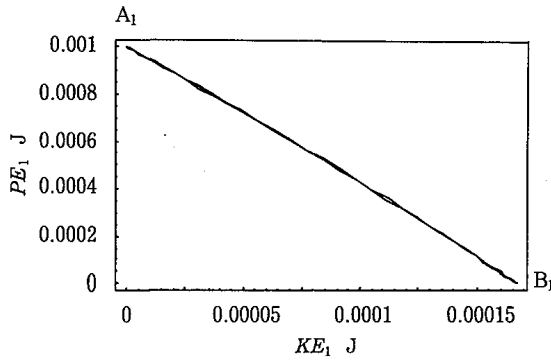


図20

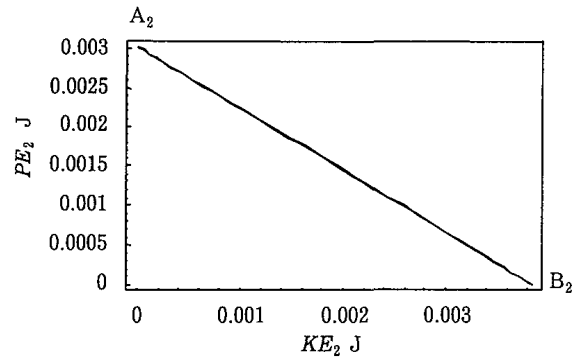


図21

この初期変位と初期角度対 $(x(0), \theta(0)) = (0.01\text{m}, 4.79^\circ)$ に対しては、微小振動理論の結果がよい近似を与える。 $x \ll 1$, $\theta \ll 1$ として運動方程式（付録2の (a12) と (a13)）を線形化し、 $m_1 = m_2 = m$, $\Theta = l\theta$ とおくとき、次を得る。

$$2\ddot{x} + \ddot{\Theta} + \omega_s^2 x = 0, \quad \ddot{x} + \ddot{\Theta} + \omega_p^2 \Theta = 0 \quad (4)$$

ここで、 $\omega_s^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_p^2 = \frac{g}{l}$ である。式(4)で $\Theta = cx$ (c は定数) とおくとき、

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_s^2}{\omega_p^2} - 2 \pm \sqrt{\frac{\omega_s^4}{\omega_p^4} + 4} \right) \quad (5)$$

を得る。 $c = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_s^2}{\omega_p^2} - 2 + \sqrt{\frac{\omega_s^4}{\omega_p^4} + 4} \right)$ が現在の場合 (C.) であり、(3)の値を代入するとき、 $\theta = 8.41x$ となることがわかる。

微小振動理論により、 $m_1 = m_2 = m$ とおくとき角振動数は次で表される。

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_p^2 \left(\frac{\omega_s^2}{\omega_p^2} + 2 \pm \sqrt{\frac{\omega_s^4}{\omega_p^4} + 4} \right) \quad (6)$$

$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} \omega_p^2 \left(\frac{\omega_s^2}{\omega_p^2} + 2 - \sqrt{\frac{\omega_s^4}{\omega_p^4} + 4} \right)}$ が現在の場合 (C.) であり、(3)の値を代入するとき、 $\omega = 4.19\text{rad/sec}$ を得る。したがって、周期 T は $T = 1.50\text{sec}$ となる。

図22と図23はおもり1の変位 (x) とおもり2の振れの角度 (θ) の時間変化を、そして図24はおもり1と2の速度 (v_x と v_θ) の時間変化の重ね書きをそれぞれ1周期にわたって図示したものである（図には、図14の A_1 , B_1 , C_1 および図15の A_2 , B_2 に対応する位置が図示されている）。どちらのおもりも同周期（1.50秒）で周期的に振動しており、微小振動理論の結果とよい一致を示す。

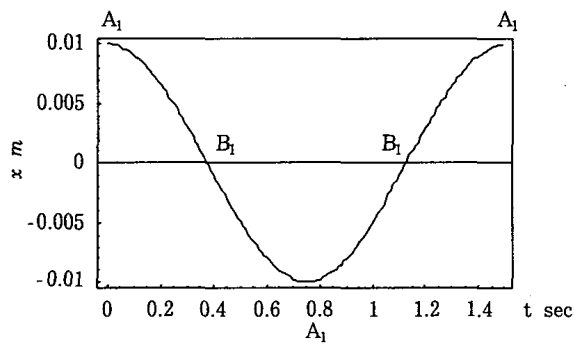


図22

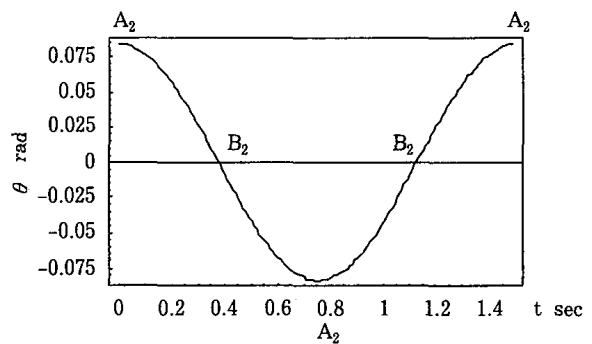


図22

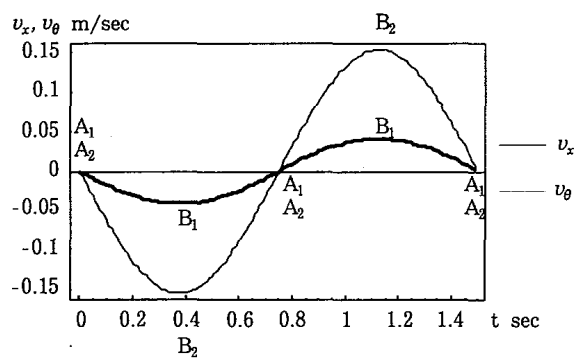


図24

図25は、 $x(0)=0.01\text{m}$ 、 $\theta(0)=4.79^\circ$ 、 $p_x(0)=p_\theta(0)=0$ に対して、時間刻み0.15秒で2つのおもりの運動をシミュレートした結果である。 x と θ は同位相、同周期（1.50秒）で振動することがわかる。

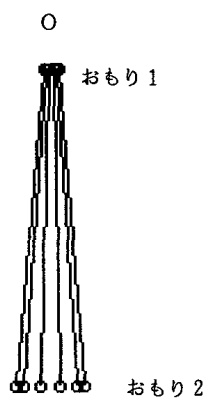


図25

4. 周期的な振る舞いをするときの初期変位と初期角度そして初期全エネルギーの関係

水平バネ振り子と単振り子からなる系が周期的な振る舞いをする場合を数値的に調べ、初期全エネルギー *Total Energy* と水平バネ振り子の初期変位 x_0 の関係式、および水平バネ振り子の初期変位 x_0 と単振り子の初期角度 θ_0 の関係式が Mathematica の Fit 関数を用いて求められた。

初期変位 x_0 を 0.00m から 0.13m まで 0.01m ずつ変化させながら、周期的な振る舞いをする場合の初期角度 θ_0 および初期全エネルギー *Total Energy* の値を数値的に求めた。その結果が表 1 に示される。

表 1

x_0 (m)	θ_0 (°)	Total Energy (J)
0.00	0.00	0.00000000
0.01	4.79	0.00400892
0.02	9.43	0.0156422
0.03	13.84	0.0340124
0.04	18.04	0.0583525
0.05	22.07	0.0881287
0.06	26.00	0.123193
0.07	29.88	0.163525
0.08	33.74	0.209114
0.09	37.61	0.260046
0.10	41.51	0.316390
0.11	45.47	0.378367
0.12	49.50	0.446029
0.13	53.59	0.519185

表 1 の初期全エネルギー *Total Energy* の値に対する初期変位 x_0 の値をプロットしたものが図 26 である。図には Mathematica の Fit 関数を用いて得られた近似関数のグラフも重ね書きされている。

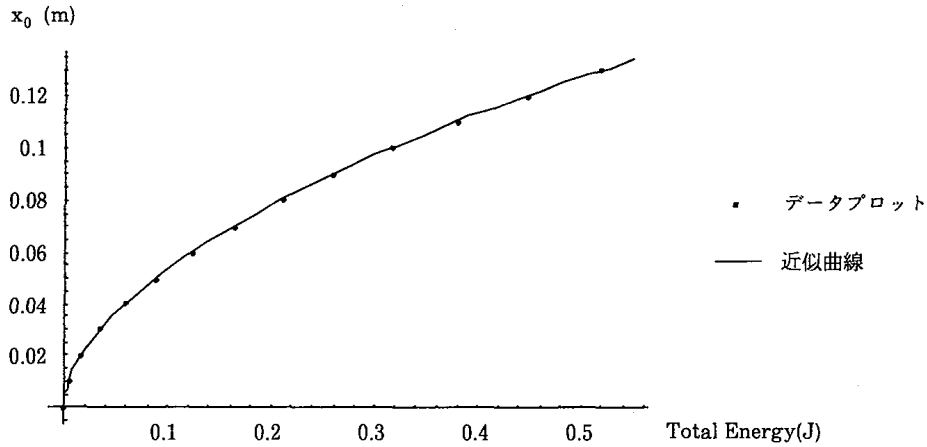


図26

$Total\ Energy$ を x , x_0 を y とおくとき, y は x で次式のように表される。

$$y = -0.657215x^{1/6} + 1.64909x^{1/4} - 1.45689x^{1/3} + 0.705198x^{1/2} - 0.0588912x \quad (7)$$

図27は表1の初期変位 x_0 の値に対する初期角度 θ_0 の値をプロットしたものである。図には Mathematica の Fit 関数を用いて得られた近似関数のグラフも重ね書きされている。

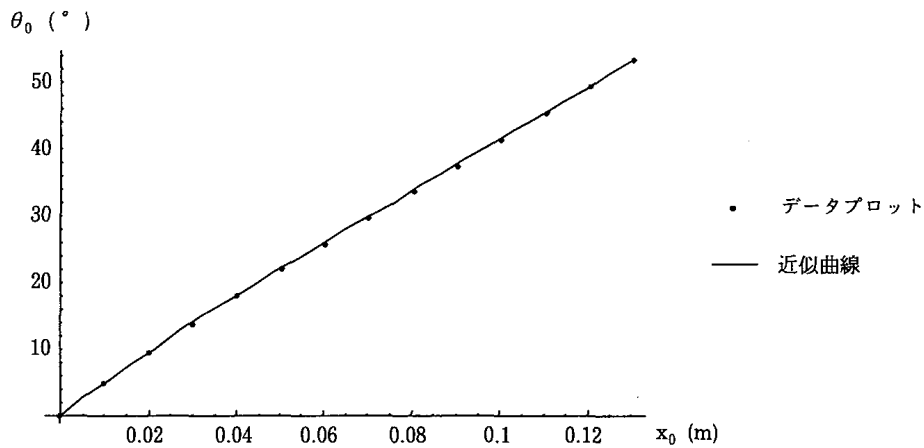


図27

x_0 を y , θ_0 を z とおくとき, z は y で次式のように表される。

$$\begin{aligned} z = & 481.697y + 57.0861y^2 - 35396.9y^3 + 236924y^4 + 8.51848 \times 10^6 y^5 \\ & - 1.82693 \times 10^8 y^6 + 1.52864 \times 10^9 y^7 - 5.88932 \times 10^9 y^8 + 7.41941 \times 10^9 y^9 \\ & + 5.93095 \times 10^9 y^{10} \end{aligned} \quad (8)$$

式(7)で初期全エネルギー x の値 ($0 \leq x \leq 0.519185$) を与えるとき, 初期変位 y の近似値が求まり, さらに, 式(8)より初期角度 z の近似値が求まる。これら初

期変位と初期角度を用いて、周期的な振る舞いをする2つのおもりの運動をシミュレートすることができる。以前の論文¹⁾で取り扱われた二重振り子の周期的な振る舞いに対しても、初期全エネルギー *Total Energy* とおもり1の初期角度 θ_{10} の関係式、およびおもり1の初期角度 θ_{10} とおもり2の初期角度 θ_{20} の関係式が求められた（付録3）。

5. 水平バネ振り子の初期変位が大きく ($x(0)=0.15\text{m}$)、単振り子の初期角度が極端に大きい ($\theta(0)=179^\circ$) 場合の数値シミュレーション

この節では、水平バネ振り子と単振り子からなる系で、水平バネ振り子の初期変位が大きく、単振り子の初期角度が極端に大きい場合の2つのおもりのカオス的な振る舞いを考察する。図28は、2つのおもりを静かに手放した位置 ($x=0.15\text{m}$, $\theta=179^\circ=3.12\text{rad}$) から5秒間にわたる x と θ の位相平面における軌道である。2つの振り子の変位と振れの角度の点 (x, θ) は、時間の経過にともない、不規則に振る舞うことがわかる。

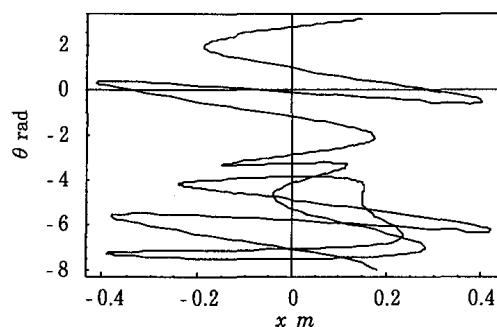


図28

図29と図30は水平バネ振り子の変位 x と単振り子の振れの角度 θ の時間変化を示す。水平バネ振り子は時間ともに不規則に振動する。一方、単振り子は時間ともに大きい振幅で振動し、宙返りさえ行うことがわかる。例えば、 $t=1.60$ 秒においてである。

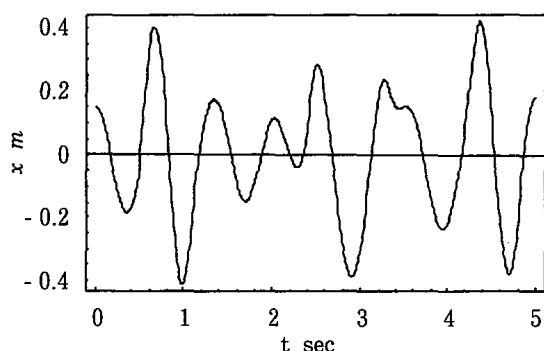


図29

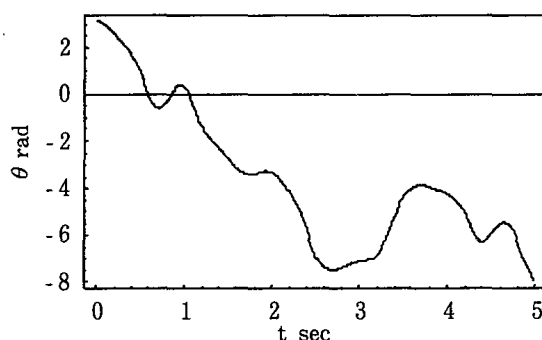


図30

おもり 2 の位置エネルギーの時間変化を図31に示す。おもり 2 の宙返りは、おもり 2 の位置エネルギーが最大値 ($t=1.60\text{sec}$ で 1.72477J) になったとき生ずることがわかる。

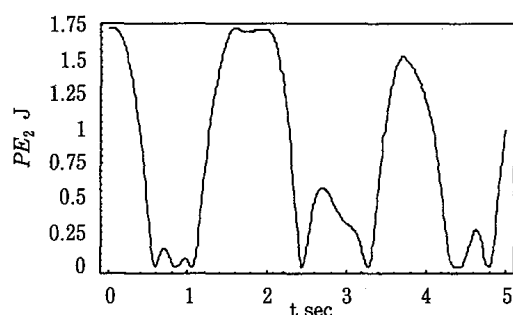


図31

水平バネ振り子の初期変位が大きく、単振り子の初期角度が極端に大きい、水平バネ振り子と単振り子からなる系の 2 つのおもりの運動はカオス的な振る舞いをする。カオスを特徴づける数理的性質の 1 つ「初期値に対する鋭敏な依存性」を、この場合に対して検証することにより、カオスであることの傍証を与える。「初期値に対する鋭敏な依存性」とは初期値の微小なずれ $d(0)$ が次式であらわされるように時間 t とともに指数関数的に増幅されることを意味する。

$$d(t) \approx d(0)e^{\lambda t} \quad (9)$$

ここで、 λ はある正の定数（リアプノフ指数）である。

水平バネ振り子と単振り子からなる系に対して、ずれ $d(t)$ は時刻 t における 2 つの振り子の状態の位相空間 $(x, \theta, p_x, p_\theta)$ における 2 点間の距離と定義される。

$$d(t) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\theta_1 - \theta_2)^2 + (p_{x_1} - p_{x_2})^2 + (p_{\theta_1} - p_{\theta_2})^2} \quad (10)$$

ここで、 $x_1, \theta_1, p_{x_1}, p_{\theta_1}$ と $x_2, \theta_2, p_{x_2}, p_{\theta_2}$ は時刻 t におけるおもり 1 とおもり 2 の位相空間における値である。

数値シミュレーションは初期値 $(x_1(0), \theta_1(0), p_{x_1}(0), p_{\theta_1}(0)) = (0.15, 179, 0, 0)$ とこの初期値にきわめて近い初期値 $(x_2(0), \theta_2(0), p_{x_2}(0), p_{\theta_2}(0)) = (0.1500001, 178.99999, 0, 0)$ でもって 30 秒間行われた。その結果を図 32 (片対数グラフ) に示す。図 32 に示されるように、 $\ln d(t)$ と t は $d(t)$ が飽和するまではほぼ直線的な関係にある。この直線を $t=0$ の点を通る直線によって荒っぽい近似を行うとき、 $\lambda = 4.1 \text{ sec}^{-1}$ を得る。したがって、指数 (λ) はカオス的に振る舞う系に対して期待されるように正である。したがって、水平バネ振り子の初期変位が大きく、単振り子の初期角度が極端に大きい、水平バネ振り子と単振り子からなる運動系はカオス的な振る舞いをすると考えられる。

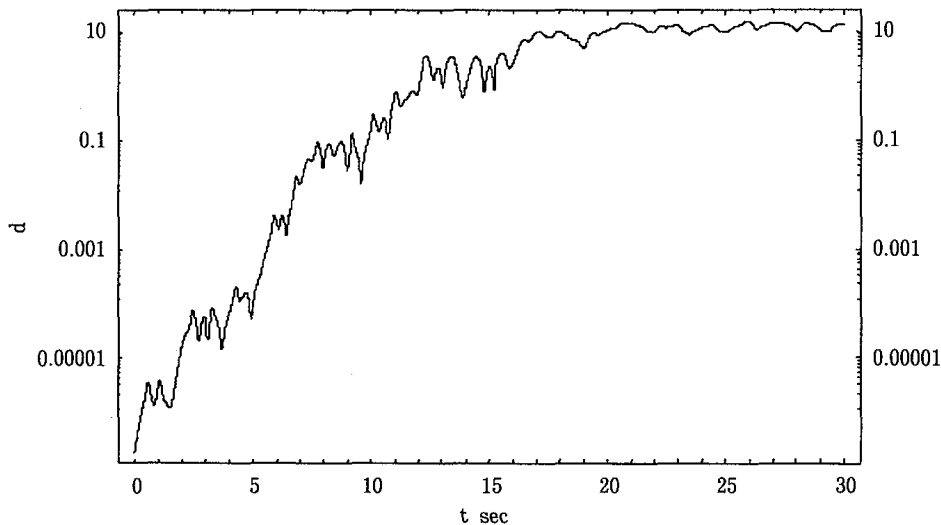


図32

図 33 は、 $x(0) = 0.15 \text{ m}$ 、 $\theta(0) = 179^\circ$ 、 $p_{\theta_1}(0) = p_{\theta_2}(0) = 0$ に対して、時間刻み 0.02 秒で 2 つの振り子の運動をシミュレートした結果である。おもり 2 が宙返りしながら振動している様子が見て取れる。

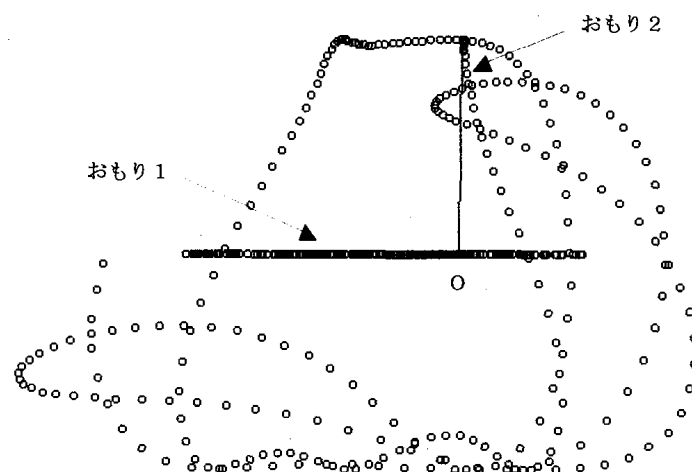


図33

引用文献

- 1) 山口 巖 二重振り子の周期的な振る舞い 神戸親和女子大学研究論叢 第35号
2002年 3 月

参考文献

- Daniel R. Stump. Solving classical mechanics problems by numerical integration of Hamilton's equations Am. J. Phys. 54(12), December 1986
- Dan Schwalbe and Stan Wagon. VisualDSolve
Springer-Verlag New York, Inc. 1997
- 邦訳 VisualDSolve-Mathematica による微分方程式の視覚化ー 金田和久訳
KAIBUNDO
- H. Goldstein. Classical Mechanics
Addison-Wesley. 1950

付録 1.

おもり 1 およびおもり 2 の位置の座標をそれぞれ $(x, 0)$, (x_2, y_2) とするとき, おもり 2 の速度成分 (\dot{x}_2, \dot{y}_2) は

$$x_2 = x + l \sin \theta, \quad y_2 = -l \cos \theta \quad (\text{a1})$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}_2 = l \dot{\theta} \sin \theta \quad (\text{a2})$$

と表される。そのとき, 各おもりの運動エネルギーの和 T と位置エネルギーの和 U は

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2
\end{aligned} \tag{a3}$$

$$U = m_2 g l (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} k x^2 \tag{a4}$$

と表される。したがって、この水平バネ振り子と単振り子からなる系のラグランジアン L は

$$\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 - m_2 g l (1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} k x^2
\end{aligned} \tag{a5}$$

と表される。

x と θ に共役な一般化運動量 p_x と p_θ はそれぞれ次で表される。

$$\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} & p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\
&= (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\theta} \cos \theta & &= m_2 l^2 \dot{\theta} + m_2 l \dot{x} \cos \theta
\end{aligned} \tag{a6}$$

\dot{x} , $\dot{\theta}$ を一般化運動量 p_x , p_θ を用いて表し直すと,

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\frac{p_x}{m_1} - \frac{p_\theta}{m_1 l} \cos \theta}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta}, \\
\dot{\theta} &= \frac{-\frac{p_x}{m_1 l^2} \cos \theta + \frac{p_\theta}{m_2 l^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta}
\end{aligned} \tag{a7}$$

となる。そのとき、水平バネ振り子と単振り子からなる系のハミルトニアン H は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
H &= p_x \dot{x} + p_\theta \dot{\theta} - L \\
&= \frac{\frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{p_\theta^2}{2m_2 l^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{p_x p_\theta}{m_1 l} \cos \theta}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta} + m_2 g l (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} k x^2
\end{aligned} \tag{a8}$$

付録 2.

ハミルトンの正準方程式は付録 1 の記法で,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}. \quad (\text{a9})$$

と表される。

水平バネ振り子と単振り子からなる系に対するハミルトニアン H の式 (a8) を式 (a9) に適用すると, 次のハミルトンの正準方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\frac{p_x}{m_1} - \frac{p_\theta}{m_1 l} \cos \theta}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{-\frac{p_x}{m_1 l} \cos \theta + \frac{p_\theta}{m_2 l^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta}, \\ \frac{dp_x}{dt} &= -kx \\ \frac{dp_\theta}{dt} &= \frac{\left[\left\{ \frac{p_x^2}{m_1} + \frac{p_\theta^2}{m_2 l^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \right\} \frac{m_2}{m_1} \cos \theta - \frac{p_x p_\theta}{m_1 l} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_2}{m_1} \cos^2 \theta\right) \right] \sin \theta}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta\right)^2} - m_2 g l \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{a10})$$

ラグランジの方程式は付録 1 の記法で,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{a11})$$

と表される。

水平バネ振り子と単振り子からなる系に対するラグランジアン L の式 (a5) を式 (a11) に適用すると, 次のラグランジの運動方程式を得る。

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta + kx = 0 \quad (\text{a12})$$

$$\ddot{x} \cos \theta + l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (\text{a13})$$

付録 3.

二重振り子が周期的な振る舞いをする場合に対して, おもり 1 の初期角度 θ_{10} を 0° から 64.3° まで 1° ずつ変化させながら, おもり 2 の初期角度 θ_{20} と初期全エネルギー *Total Energy* の値を数値的に求めた。その結果が表 2 に示される。

表 2

θ_{10} (°)	θ_{20} (°)	Total Energy (J)	θ_{10} (°)	θ_{20} (°)	Total Energy (J)
0	0.000	0.000000000	33	42.48	0.114577
1	1.414	0.000119266	34	43.49	0.120703
2	2.829	0.000477180	35	44.48	0.126924
3	4.240	0.00107257	36	45.44	0.133211
4	5.654	0.00190650	37	46.39	0.139609
5	7.058	0.00297390	38	47.32	0.146089
6	8.470	0.00428083	39	48.18	0.152520
7	9.868	0.00581580	40	49.09	0.159202
8	11.27	0.00758668	41	49.91	0.165772
9	12.65	0.00957418	42	50.76	0.172538
10	14.03	0.0117903	43	51.52	0.179178
11	15.40	0.0142251	44	52.36	0.186144
12	16.77	0.0168848	45	53.09	0.192920
13	18.16	0.0197898	46	53.82	0.199800
14	19.49	0.0228519	47	54.56	0.206810
15	20.84	0.0261536	48	55.24	0.213751
16	22.19	0.0296720	49	55.94	0.220844
17	23.51	0.0333649	50	56.57	0.227833
18	24.81	0.0372385	51	57.23	0.234997
19	26.10	0.0413200	52	57.84	0.242106
20	27.40	0.0455831	53	58.46	0.249329
21	28.68	0.0500330	54	59.06	0.256577
22	29.93	0.0546289	55	59.63	0.263819
23	31.15	0.0593631	56	60.23	0.271227
24	32.35	0.0642465	57	60.71	0.278355
25	33.58	0.0693681	58	61.25	0.285734
26	34.77	0.0745950	59	61.81	0.293245
27	35.95	0.0799785	60	62.30	0.300615
28	37.09	0.0854531	61	62.79	0.308051
29	38.20	0.0910314	62	63.33	0.315704
30	39.30	0.0967502	63	63.71	0.322931
31	40.39	0.102606	64	64.19	0.330523
32	41.43	0.108505	64.3	64.30	0.332707

表 2 の初期全エネルギー *Total Energy* の値に対する初期角度 θ_{10} の値をプロットしたものが図34である。図には Mathematica の Fit 関数を用いて得られた近似関数のグラフも重ね書きされている。

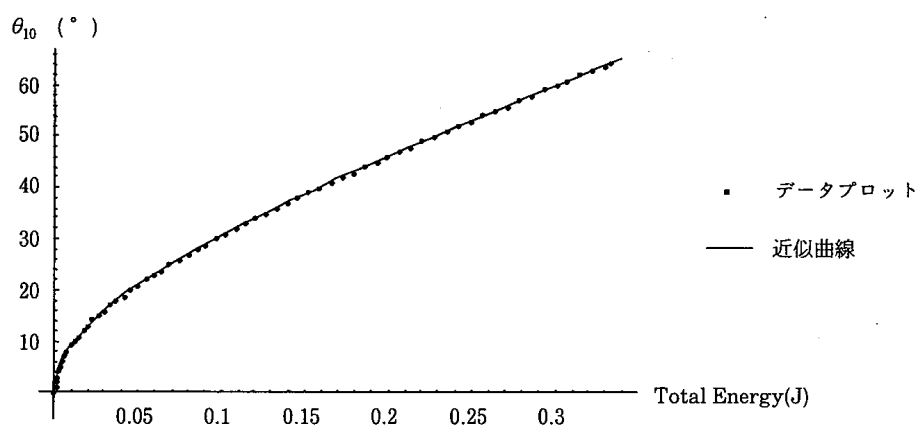


図34

$Total\ Energy$ を x , θ_{10} を y とおくと、 y は x で次式のように表される。

$$y = -2556.4x^{1/6} + 7461.9x^{1/5} - 8121.59x^{1/4} + 4101.18x^{1/3} - 920.059x^{1/2} + 185.279x \quad (a14)$$

図35は表2の初期角度 θ_{10} の値に対する初期角度 θ_{20} の値をプロットしたものである。図には Mathematica の Fit 関数を用いて得られた近似関数のグラフも重ね書きされている。

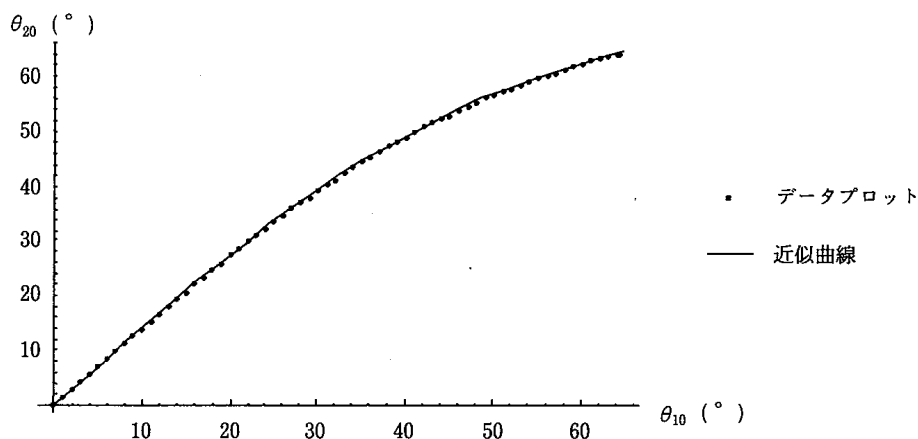


図35

θ_{10} を y を、 θ_{20} を z とおくと、 z は y で次式のように表される。

$$z = 1.41674y - 5.72589 \times 10^{-4}y^2 - 6.80742 \times 10^{-5}y^3 - 3.08034 \times 10^{-7}y^4 - 6.63131 \times 10^{-8}y^5 \\ + 1.7226 \times 10^{-9}y^6 - 1.09832 \times 10^{-11}y^7 \quad (a15)$$